Gekoppelte Systeme.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen Philosophischen Fakultät der Universität Rostock

vorgelegt von

Karl Fiedler
aus Saalfeld i. Th.

Rostock
H. Winterberg's Buchdruckerei
1905

Referent: Herr Professor Dr. Wachsmuth.

Dem Andenken
meiner lieben Eltern.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549210_0046

Die Einwirkung zweier elektrischer Schwingungssysteme auf einander ist in zahlreichen Arbeiten theoretisch behandelt worden und die Resultate derselben hat man praktisch bei der drahtlosen Telegraphie[1] anzuwenden versucht.

J. v. Geitler, Fürst B. Galitzin, A. Oberbeck, sowie Domalip und Kolacek[2] haben nachgewiesen, dass, wenn zwei elektrische Schwingungssysteme genügend intensiv auf einander einwirken, jedes derselben dann nicht mehr eine, sondern zwei Eigenperioden hat, auch wenn die beiden Systeme auf einander abgestimmt waren.

Bjerknes[3] hat sodann den Fall sehr schwacher Koppelung im Bezug auf Perioden und Dämpfungs-

---

[1]) Max Wien, Drahtlose Telegraphie. Annalen der Physik 8; 1902.

P. Drude, Über die induktive Erregung zweier elektrischer Schwingungskreise mit Anwendung auf Perioden- und Dämpfungsmessung, Teslatransformatoren und drahtlose Telegraphie. Annalen der Physik 13; 1904.

[2]) J. v. Geitler, Sitzungsbericht der Wiener Akademie, Februar und Oktober 1885.

Fürst B. Galitzin: Petersb. Berichte, Mai und Juni 1895.

A. Oberbeck: Wiedemann, Annalen der Physik und Chemie 55; 1895.

Domalip und Kolacek, Annalen der Physik und Chemie 57; 1896.

[3]) Bjerknes, Annalen der Physik und Chemie 55; 1895.

messung durch Diskussion von »Resonanzkurven« ausführlich behandelt.

Es sind nun aber die Differentialgleichungen, wie sie für elektrische Schwingungen gelten dieselben wie die für elastische, ja es sind sogar die letzteren die ursprünglichen und zuerst gefundenen, welche man auf elektrische Vorgänge mit Erfolg übertragen hat.

Lord Rayleigh[1] hat in seiner Theorie des Schalles die allgemeinen Schwingungsgleichungen von Systemen von einem und mehreren Freiheitsgraden aufgestellt und von diesen ist Max Wien[2] ausgegangen und hat in seiner Arbeit »Über die Rückwirkung eines resonierenden Systems« in allgemeiner, doch sehr ausführlicher Weise den Fall der Koppelung zweier Systeme mit besonderer Berücksichtigung der Resonanz und Dämpfung behandelt.

Die aufgestellten Ausgangsgleichungen der Bewegung in allgemeinster Form für zwei Systeme sind daselbst:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} + 2 h_1 \dfrac{d x_1}{dt} + k_1^2 x_1 + \rho_1 \dfrac{d^2 x_2}{dt^2} \\ \qquad\qquad + 2 \sigma_1 h_1 \dfrac{d x_2}{dt} + \tau_1 k_1^2 x_2 = 0 \\ \dfrac{d^2 x_2}{dt^2} + 2 h_2 \dfrac{d x_2}{dt} + k_2^2 x_2 + \rho_2 \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} \\ \qquad\qquad + 2 \sigma_2 h_2 \dfrac{d x_1}{dt} + \tau_2 k_2^2 x_1 = 0 \end{cases}$$

[1]) Lord Rayleigh, Theory of Sound. (Deutsche Übersetzung F. Neesen, Braunschweig).

[2]) M. Wien: Wiedem. Annalen 61; 1897.

Hierin sind h die Dämpfungen, k die natürlichen Schwingungszahlen in 2π Sekunden und ρ; σ und τ sind die Koppelungskoeffizienten, welche als reine Zahlen aus den Energiegleichungen sich ergeben, sie führen zu einer linearen Differentialgleichung vierter Ordnung und weiter zu einer biquadratischen Gleichung.

Als Lösung erhalten wir die Werte:

$$x_1 = A_1 e^{-\delta_1 t} \sin(n_1 t + \varphi_1) + B_1 e^{-\delta_2 t} \sin(n_2 t + \varphi_2),$$

$$x_2 = A_2 e^{-\delta_1 t} \sin(n^1 t + \varphi_1^1) + B_2 e^{-\delta_2 t} \sin(n_2 t + \varphi_2^1)$$

Es sind die Verhältnisse $A_1 : A_2$ und $B_1 : B_2$ durch die Koeffizienten der Systeme bestimmt, während die absolute Grösse der Amplituden und φ willkürlich sind; aus der Form der Gleichung ist ferner ersichtlich, dass man im allgemeinen zwei gemeinschaftliche, aber von einander unabhängige Schwingungen mit den Schwingungszahlen n_1 und n_2 und den Dämpfungen δ_1 und δ_2 erhält. Wien unterscheidet nach den Koeffizienten ρ; ρ und τ der Gleichungen (1), welche die gesamte, gegenseitige Wirkung darstellen, die Fälle der Kraft-, Reibungs- und Beschleunigungskoppelung; was die übrigen Koeffizienten betrifft, so sind wie schon erwähnt, h die Dämpfungen und k die natürlichen Schwingungszahlen der Einzelsysteme in 2π Sekunden. Er hat nun, um den Einfluss und die Wirkung der verschiedenen Grössen auf das Resultat besser erkennen zu können, die Arten der Koppelung in einer Anzahl von Unterspezialfällen betrachtet; er geht hierbei von den einfachsten Fällen zu den komplizierteren über und behandelt, wie schon erwähnt, eingehend diejenigen der Resonanz bei fehlender

oder vorherrschender Dämpfung. Er durfte sich hierbei Vereinfachungen durch Vernachlässigen von Gliedern höherer Ordnung erlauben, die ohne grossen Einfluss auf seine Resultate gewesen sind, wodurch diese aber an Übersichtlichkeit gewannen und sich so besser diskutieren liessen.

Er hat z. B. bei dem Fall der Kraftkoppelung ($\rho_1 = \rho_2 = 0$) ohne Dämpfung ($h_1 = h_2 = 0$) — dessen Ausgangsgleichungen

$$(2) \qquad \begin{cases} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + k_1^2 x_1 + \tau_1 k_1^2 x_2 = 0 \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} + k_2^2 x_2 + \tau_2 k_2^2 x_1 = 0 \end{cases}$$

sind und wenn die Schwingungszahlen der ursprünglichen Systeme k_1 ung k_2 sowie die Koppelungskoeffizienten τ_1 und τ_2 gegeben waren — für die resultierenden Schwingungen vereinfachte Werte erhalten bei der Annahme, die Koppelung sei stets eine sehr schwache und die Differenz der Schwingungszahlen werde entweder sehr gross oder für den Fall der Resonanz gleich Null.

Will man nun hingegen, was unsere Aufgabe sein soll, aus einer bekannten Endschwingung und aus zwei gegebenen Einzelschwingungen auf den Grad der Koppelung schliessen und »Koppelungskurven« untersuchen, indem man ein Einzelsystem aus zwei variierenden Einzelsystemen sich zusammengesetzt denkt, wie es uns z. B. vorliegt in einem freischwingenden Stab, den wir uns als aus zwei, eng aneinander gekoppelten Einzelstäben von gleicher oder verschiedener Länge zu-

sammengesetzt betrachten können. Da die Koppelungskoeffizienten bei verschieden langen Stäben, die möglicherweise auch aus verschiedenem Material sein können, sicher variieren und ferner die Koppelung als eine sehr enge anzunehmen ist, so muss zunächst die Einschränkung, »$\tau_1 \tau_2$ sehr klein« in Wegfall kommen und es wird zweitens auch der Unterschied der Schwingungszahlen bei wechselnder Länge der Stäbe nicht immer und durchgehend ein sehr grosser oder gar gleich Null sein, sodass es wohl vorzuziehen ist, stets die genauere Formal ohne Einschränkungen anzuwenden.

Aus den Differentialgleichungen (2) ergiebt sich die Differentialgleichung vierter Ordnung:

$$(3)\quad \frac{d^4 x}{dt^4} + \frac{d^2 x}{dt^2}\left(k_1^2 + k_2^2\right) + x\left(k_1^2 k_2^2 (1 - \tau_1 \tau_2)\right) = 0$$

Setzen wir

$$x = e^{nt}$$

wenn n die neue Endschwingungszahl angiebt, so erhalten wir aus (3) die biquadratische Gleichung:

$$n^4 - n^2 (k_1^2 + k_2^2) + k_1^2 k_2^2 (1 - \tau_1 \tau_2) = 0$$

und hieraus:

$$\frac{n^2}{k_1^2 k_2^2}\left(n^2 - (k_1^2 + k_2^2)\right) = \tau_1 \tau_2 - 1$$

oder

$$(4)\qquad \tau_1 \tau_2 = 1 - \frac{n^2 (k_1^2 + k_2^2 - n^2)}{k_1^2 k_2^2}$$

d. h. wir haben einen Ausdruck erhalten, aus welchem sich das Produkt der Koppelungskoeffizienten berechnen lässt, wenn die Schwingungszahlen n; k_1 und k_2 be-

kannt sind, aber immer unter Berücksichtigung der Voraussetzung, dass die Systeme I und II gekoppelt das System mit der Schwingunsszahl n ergeben sollen.

Um nun die Schwingungszahl eines beliebigen Stabes zu bestimmen, wollen wir zunächst auf das Problem der transversalen Schwingungen eines Systems zurückgehen, als dessen Lösung man die Differentialgleichung:[1]

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a^2 b^2 \frac{d^4 y}{d x^4} = o$$

oder deren Integral

$$y = u \cos\left(\frac{a b}{l^2} m^2 t + \varepsilon\right)$$

hat und wonach die Schwingungszahl der Bewegung selbst sich darstellen lässt durch den Ausdruck:

$$N = \frac{a b}{l^2} \frac{m^2}{2\pi} \tag{5}$$

Hierin haben die einzelnen Grössen folgende Bedeutung:

l ist die Länge des Stabes,

m ist eine Konstante,

deren Wert noch zu bestimmen ist;

$$a^2 = E : D$$

ist gleich dem Elastizitätskoeffizienten durch die Dichte des Sabes und

$$b^2 = J : S$$

ist das Trägheitsmoment dividiert durch den Querschnitt und zwar bestimmt sich b^2 für einen prismatischen Stab von der Dicke d und der Breite h als:

---

[1]) Siehe Violle: Physik II. 1; Seite 200 u. f.

$$b^2 = J : S = \frac{1}{12} hd^3 : hd = \frac{d^2}{12};$$

also unabhängig von der Breite.

m dagegen findet man aus den Bedingungen, ob der Stab an seinen Enden frei, befestigt oder gestützt ist und für einen an beiden Enden freischwingenden Stab erhält m nach der Gleichung:

$$\cos m \ \mathrm{Kos}\, m = 1$$

die Werte:

$$3{,}011\,\frac{\pi}{2};\ 5\,\frac{\pi}{2};\ 7\,\frac{\pi}{2};\ \cdots\cdots\ (2n+1)\,\frac{\pi}{2}$$

Diese müssen in Gleichung (5) eingesetzt werden und man ersieht, dass die Schwingungszahlen des Grundtones und der Obertöne ein und desselben freischwingenden Stabes sich wie die Quadrate der ungraden Zahlen (abgesehen von dem ersten Wert

$$m = 3{,}011\,\frac{\pi}{2}$$

verhalten.

Es wird

$$(6) \quad N = \frac{a\,b}{2\pi\,l^2}\,m^2 = \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 \pi \cdot \frac{d}{2l^2}\sqrt{\frac{E}{12\,D}}$$

(Anmerkung: Diese Formel ist sicher die genauere oder einzig richtige als wie sie in einzelnen Lehrbüchern der Physik, z. B. bei E. Rieke II. Aufl. 1902, angegeben wird und für k Knotenlinien bei einem prismatischen Stab

$$N = \left(\frac{2k-1}{2}\right)^2 \frac{\pi \cdot d}{l^2}\sqrt{\frac{4\,E}{\delta}}$$

lautet; auch Poisson gibt in seinem Werk »Traité de Mécanique« II. Edition 1833 Tome second, pag. 385 an:

$$n = \frac{\lambda^2 b}{2\pi l^2}$$

worin nach pag. 372—374

$$b = a\,h;\ a^2 = \frac{g \,.\, l \,.\, q}{p} \text{ und } h = \frac{E}{\sqrt{3}} \text{ ist;}$$

2ε = Höhe,

p : g ist unser D,

q : l ist unser E,

sodass Formel (6) aus der von Poisson abgeleitet zu betrachten ist.)

Sind die Stäbe alle aus demselben Material hergestellt, so lässt sich in Gleichung (6) der Faktor

$$\frac{\pi}{8}\sqrt{\frac{E}{12\,D}} = p$$

als eine konstante Grösse betrachten und da zu den, später auch angeführten, praktischen Versuchen Holzstäbe verwendet worden sind, mussten der Elastizitätskoeffizient und die Dichte derselben bestimmt werden und es wurden nach verschieden ausgeführten Methoden als Durchschnittswerte endgiltig gefunden:

$$E = 1060 \text{ und } D = 0{,}5.$$

Für die Berechnungen im C-G-S-System ist der Elastizitätskoeffizient mit der Zahl 98100000 zu erweitern.

Es mögen nun zunächst die Schwingungszahlen berechnet werden für Holzstäbe von den Längen 40 cm; 35 cm; 30 cm; 25 cm; 20 cm; 15 cm; 10 cm und 5 cm und für die Dicken 1 cm; 2 cm; 3 cm und 4 cm und zwar für den Grundton, ersten und zweiten Oberton.

A. Für den Grundton wird

$$N = 3{,}011^2 \cdot \frac{d}{l^2} \frac{\pi}{8} \sqrt{\frac{E}{12D}}$$

oder

$$N = p \cdot \frac{3{,}011^2 \cdot d}{l^2}$$

α)

$$d = 1 \text{ cm}$$

$$p = \frac{\pi}{8} \sqrt{\frac{1060 \cdot 98100000}{12 \cdot 0{,}5}};$$

$$p = \frac{\pi}{8} \sqrt{1060 \cdot 16350000};$$

	log 1060 = 3,0253059 log 16350000 = 7,2135178	+
	10,2388237	
	5,1194118 log π = 0,4971499	+
	5,6165617 log 8 = 0,9030900	−
p = 51697,71 3,011² = 9,066121	log p = 4,7134717 log 3,011² = 0,9574215	+
	5,6708932	

l = 40² = 1600	log 1600 = 3,2041200
35² = 1225	log 1225 = 3,0881361
30² = 900	log 900 = 2,9542425
25² = 625	log 625 = 2,7958800
20² = 400	log 400 = 2,6020600
15² = 225	log 225 = 2,3521825
10² = 100	log 100 = 2,0000000
5² = 25	log 25 = 1,3979400

$N_{40} = 292{,}94$	$\log N_{40} = 2{,}4667732$
$N_{35} = 382{,}61$	$\log N_{35} = 2{,}5827571$
$N_{30} = 520{,}78$	$\log N_{30} = 2{,}7166507$
$N_{25} = 749{,}92$	$\log N_{25} = 2{,}8750132$
$N_{20} = 1171{,}75$	$\log N_{20} = 3{,}0688332$
$N_{15} = 2083$	$\log N_{15} = 3{,}3187107$
$N_{10} = 4687$	$\log N_{10} = 3{,}6708932$
$N_{5} = 18748$	$\log N_{5} = 4{,}2729532$

Betrachten wir nicht Einzel- (vibrationes singulares = v . s), sondern Doppelschwingungen (v . d), so sind dieselben für Stäbe von den Dicken

1 cm	2 cm	3 cm	4 cm
146,47	292,94	439,3	586
191,3	382,6	574	765
260,4	570,78	781	1042
375	750	1125	1500
585,87	1171,75	1758	2344
1041,6	2083	3125	4166
2343,5	4687	7031	9374
9374	18748	28122	37496

B. I. Oberton.

$$N = \frac{25}{l^2} d \cdot p$$

$d = 1$ cm

$\log p = 4{,}7134717$

$\log 25 = 1{,}3979400$ $+$

$6{,}1114117$

Werden hiervon die Lagarithmen der verschiedenen l^2 subtrahiert, so erhält man:

$N'_{40} = 807{,}78$	$\log N'_{40} = 2{,}9072917$
$N'_{35} = 1055$	$\log N'_{35} = 3{,}0232756$
$N'_{30} = 1436$	$\log N'_{30} = 3{,}1571692$
$N'_{25} = 2068$	$\log N'_{25} = 3{,}3155317$
$N'_{20} = 3231$	$\log N'_{20} = 3{,}5093517$
$N'_{15} = 5744$	$\log N'_{15} = 3{,}7592293$
$N'_{10} = 12925$	$\log N'_{10} = 4{,}1114117$
$N'_{5} = 51698$	$\log N'_{5} = 4{,}7134717$

C. II. Oberton.

$$N = \frac{49}{l^2} d \cdot p$$

$$\log p = 4{,}7134717$$
$$\log 49 = 1{,}6901961$$
$$6{,}4036678$$

$N''_{40} = 1583{,}29$	$\log N''_{40} = 3{,}1995478$
$N''_{35} = 2068$	$\log N''_{35} = 3{,}3155317$
$N''_{30} = 2814{,}6$	$\log N''_{30} = 3{,}4494223$
$N''_{25} = 4053$	$\log N''_{25} = 3{,}6077878$
$N''_{20} = 6333$	$\log N''_{20} = 3{,}8016078$
$N''_{15} = 11259$	$\log N''_{15} = 4{,}0514853$
$N''_{10} = 25332$	$\log N''_{10} = 4{,}4036678$
$N''_{5} = 101328$	$\log N''_{5} = 5{,}0057278$

In Doppelschwingungen ausgedrückt sind die Schwingungszahlen für die Dicken von

1 cm	2 cm	3 cm	4 cm
	I. Oberton.		
403,9	807,8	1212	1615,6
527,5	1055	1583	2110
718	1436	2154	2872
1034	2068	3102	4136
1616	3231	4847	6462
2872	5744	8616	11488
6463	12925	19388	25850
25849	51698	77547	103396
	II. Oberton.		
791,6	1583,3	2375	3166,5
1034	2068	3102	4136
1407	2814,6	4222	5629
2027	4053	6080	8106
3167	6333	9500	12666
5630	11259	16889	22518
12666	25332	37998	50664
55664	101328	166992	202656

Bei der Berechnung dieser Schwingungszahlen waren als Werte für die Dichte und den Elastizitätskoeffizienten diejenigen von Holzstäben in die Formel eingesetzt worden und um nun die gefundenen Zahlen prüfen und vergleichen zu können, wurden praktische Versuche mit einer Anzahl solcher Stäbe angestellt.

Die Holzstäbe waren aus möglichst gleichmässigem Material — gutem, trockenen Lindenholz — prismatisch verfertigt und wurden an beiden Enden freischwingend bifilar so aufgehängt, dass die Unterstützungslinien sich da befanden, wo nach der Theorie die Schwingungsknoten für den Grundton sein sollten. Folgende Zusammenstellung gibt eine Übersicht[1] über die Lage der Knoten für jeden Ton eines Stabes von der Länge 1.

Ton											
1.				0,224			0,776				
2.			0,132			0,5			0,868		
3.	0,094			0,357			0,643				0,906
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
n.	$\frac{1,322}{4n+2}$		$\frac{4,987}{4n+2}$		$\frac{9,001}{4n+2}$	. . . .		$\frac{4k-3}{4n+2}$		. . . .	
	. . .	$\frac{4n-7,001}{4n+2}$		$\frac{4n-2,982}{4n+2}$			$\frac{4n+0,678}{4n+2}$				

Das Erregen der Stäbe geschah entweder durch vertikales Anstreichen an einem Ende mit einem Violinbogen oder durch Aufschlagen mit einem Holzhammer zwischen den berechneten Knotenlinien und es ergab sich folgendes Bild:

[1]) Siehe Violle, pag. 203.

Stab	Länge in cm	Dicke in cm	Nach der Berechnung ist ungefähr: Grundton	I. Oberton	II. Oberton	Gefunden durch: Anschlagen	Anstreichen	Anmerkungen zu den Versuchen
I.	40	2	d_1	g_2—gis_2;	g_3	d_2—e_2	d_2	d_2 vorherrschend
II.	30	2	c_2	f_3—fis_3;	f_4—fis_4	c_2—d_2 cis_3—d_3	e_3—fis_3	Beim Anschlagen werden die beiden Oktaven nebeneinander vernommen
III.	20	2	d_3	gis_4	g_5	gis_2; d_3 cis_4 - d_4	cis_4—d_4;	d_3 vorherrschend beim Anschlagen
IV.	40	1	d	gis_1	g_2—gis_2	g_1—a_1 g_2—a_2	a_3	a_3 fast rein
V.	30	1	c_1	fis_2	f_3—fis_3	c_2—d_2 f_3	f_2; cis_3	f_2 fast rein
VI.	20	1	d_2	gis_3	g_4	d_2; d_3	h_4—c_5	d_2 und d_3 durch Anschlagen deutlich erkennbar

Vergleich der theoretischen und praktischen Resultate.

Stab I. Die höhere Oktave des berechneten Grundtons wird vernommen.

Stab II. Der Grundton, sowie die zwei höheren Oktaven desselben und der erste Oberton, aber nicht sehr genau, werden vernommen.

Stab III. Der Grundton und die zweit höhere Oktave desselben; gis$_2$ würde die zweit tiefere Oktave des ersten Obertons sein.

Stab IV. Der erste und zweite Oberton werden durch Anschlagen erhalten.

Stab V. Die Oktave des Grundtons und ausserdem der I. und II. Oberton sind nicht ganz genau wahrzunehmen.

Stab VI. Der Grundton, sowie der II. Oberton sind vernehmbar.

Zunächst wird wohl die Bemerkung sehr angebracht sein, dass man mit einiger Vorsicht die durch den Versuch gefundenen Töne als die den Stäben ideal eigentümlichen betrachten muss, zumal die Feststellung derselben keinesfalls Anspruch auf sehr grosse Sicherheit machen kann. Es war zunächst besonders beim Anschlagen der Stäbe sehr schwer, reine Töne von genügender Intensität und Dauer zu erhalten und da dieselben nur mittels eines Klaviers und einiger Stimmgabeln analysiert werden konnten,[1] so ist hierdurch

[1]) Bei diesen Versuchen, die allein nicht ausführbar waren, hatte Herr Kantor Eiermann-Köstritz die Güte, mich mit seinem feineren musikalischen Gehör zu unterstützen.

schon eine sehr grosse Fehlergrenze vorhanden und es kam noch hinzu, dass es manchmal fast ganz unmöglich war festzustellen, aus welcher Oktave der oder die hauptsächlichen hervortretenden Töne entnommen werden sollten; bei den sehr kurzen Stäben waren die erhaltenen Töne auch so hoch, dass sie über die vergleichbaren hinausgingen.

Ferner ist anzunehmen, dass nicht immer der Grundton selbst der vernehmbarste war, denn dies erhellt daraus, dass man durch Anstreichen mit dem Bogen meistens bedeutend höhere Töne, die teilweise verhältnismässig sehr rein waren und auf gleichmässigen Höhe gehalten werden konnten, als durch Anschlagen erhielt.

Der Versuch ist zwar gemacht worden, dieselben mit der Theorie in Einklang zu bringen, aber wenn die Abweichungen an einzelnen Stellen zu evident sind und ein Übereinstimmen oder Anpassen sich nicht bewerkstelligen liess, so kann man sich diesen Unterschied vielleicht auch durch nicht ganz gleichmässige Struktur oder Äste im Holz erklären.

Leider misslangen die sämtlichen Versuche, einen längeren Stab durch kürzere darzustellen; die Koppelung war sicher nicht stark genug, denn beim Erregen des einen oder anderen Teiles, klang nur der diesem Teilstab eigentümliche Ton hervor.

Kehren wir jetzt zu unserer gefundenen Formel (4) für die Koppelung in allgemeinster Form:

$$\tau_m \tau_n = 1 - \frac{n^2 (k_m^2 + k_n^2 - n^2)}{k_m^2 k_n^2}$$

zurück, so lassen sich aus den berechneten Schwingungszahlen aller Stäbe eine grössere Anzahl von Zusammenstellungen machen, aber da verschiedene sich nur um Multiplikationsfaktoren von einander unterscheiden würden, wollen wir uns auf folgende Fälle beschränken und zu diesen die Einzelschwingungen der Grundtöne resp. die Doppelschwingungen der 2 cm dicken Stäbe benutzen.

n	k_m	k_n
$N_{40} = 293$	$N_{35} = 383$	$N_5 = 18748$
	$N_{30} = 521$	$N_{10} = 4687$
	$N_{25} = 750$	$N_{15} = 2083$
	$N_{20} = 1172$	$N_{20} = 1172$
$N_{35} = 383$	$N_{30} = 521$	$N_5 = 18748$
	$N_{25} = 750$	$N_{10} = 4687$
	$N_{20} = 1172$	$N_{15} = 2083$
$N_{30} = 521$	$N_{25} = 750$	$N_5 = 18748$
	$N_{20} = 1182$	$N_{10} = 4687$
	$N_{10} = 2083$	$N_{10} = 2083$
$N_{25} = 750$	$N_{20} = 1172$	$N_5 = 18748$
	$N_{15} = 2083$	$N_{10} = 4687$
$N_{20} = 1172$	$N_{15} = 2083$	$N_5 = 18748$
	$N_{10} = 4687$	$N_{10} = 4687$
$N_{15} = 2083$	$N_{10} = 4687$	$N_5 = 18748$
$N_{10} = 4687$	$N_5 = 18748$	$N_5 = 18748$

Die Ausrechnung der Einzelfälle fst folgende:

$$\tau_{35}\,\tau_5 = 1 - \frac{21453\,(87\,87\,1163 + 15145)}{87\,87\,1163\,.\,36598};$$

$$\tau_{35}\,\tau_5 = 1 - \frac{21453\,.\,87\,88\,6308}{87\,87\,1163\,.\,36598};$$

$$\left.\begin{array}{rr} \log & 21453 = 4{,}3314864 \\ \log & 87\,88\,6208 = 7{,}9439212 \end{array}\right\} +$$

$$12{,}2754076$$

$$\left.\begin{array}{rr} \log & 87\,87\,1163 = 7{,}9438464 \\ \log & 36598 = 4{,}5634542 \end{array}\right\} + \Bigg\} -$$

$$12{,}5073006$$

$$0{,}7681070 - 1$$

$$\tau_{35}\,\tau_5 = 1 - 0{,}5862826 = 0{,}4137174\,.$$

$$\tau_{30}\,\tau_{10} = 1 - \frac{21453\,(5491948 + 46349)}{5491948\,.\,67802};$$

$$\tau_{30}\,\tau_{10} = 1 - \frac{21453\,.\,5538297}{5491948\,.\,67802};$$

$$\left.\begin{array}{rr} \log & 21443 = 4{,}3314864 \\ \log & 5538297 = 6{,}7433765 \end{array}\right\} +$$

$$11{,}0748629$$

$$\left.\begin{array}{rr} \log & 5491948 = 6{,}7397264 \\ \log & 67802 = 4{,}8312414 \end{array}\right\} + \Bigg\} -$$

$$11{,}5709678$$

$$0{,}5038951 - 1$$

$$\tau_{20}\,\tau_{10} = 1 - 0{,}3190767\,.$$

$$\tau_{30}\,\tau_{10} = 0{,}6809233\,.$$

$$\tau_{25}\,\tau_{15} = 1 - \frac{21453\,(1084829 + 129141)}{1084829\,.\,343247};$$

$$\tau_{25}\,\tau_{15} = 1 - \frac{21453 \,.\, 1203970}{1084829 \,.\, 140594};$$

$$\begin{array}{rr} \log & 21453 = 4{,}3314964 \\ \log & 1203970 = 6{,}0806157 \\ \hline & 10{,}4121021 \\ \log & 1084829 = 6{,}0353613 \\ \log & 140594 = 5{,}1479664 \\ \hline & 11{,}1833276 \end{array} \Bigg\} + \Bigg\} -$$

$$0{,}2287743 - 1$$

$$\tau_{25}\,\tau_{15} = 1 - 0{,}1693458 = 0{,}8306542\,.$$

$$\tau_{20}\,\tau_{20} = 1 - \frac{21453 \,.\, 665041}{3432472};$$

$$\begin{array}{rr} \log & 21453 = 4{,}3314864 \\ \log & 665041 = 5{,}8228485 \\ \hline & 10{,}1543349 \\ \log & 343247 = 11{,}0713128 \end{array} \Bigg\} + \Bigg\} -$$

$$0{,}0831221 - 1$$

$$\tau_{20}\,\tau_{20} = 1 - 0{,}1210936 = 0{,}8789064\,.$$

$$\tau_{30}\,\tau_{5} = 1 - \frac{36598\,(87871163 + 31204)}{87871163 \,.\, 67802};$$

$$\tau_{30}\,\tau_{5} = 1 - \frac{36598 \,.\, 87902367}{87871163 \,.\, 67802};$$

$$\begin{array}{rr} \log & 36598 = 4{,}5635542 \\ \log & 87902367 = 7{,}9440006 \\ \hline & 12{,}5074548 \\ \log & 87871163 = 7{,}9448464 \\ \log & 67802 = 4{,}8312414 \\ \hline & 12{,}7750878 \end{array} \Bigg\} -$$

$$0{,}7323670 - 1$$

$$\tau_{30}\,\tau_5 = 1 - 0{,}5399670 = 0{,}460033\,;$$

$$\tau_{25}\,\tau_{10} = 1 - \frac{36598\,(5491948 + 103996)}{5491948\,.\,140594}\,;$$

$$\tau_{25}\,\tau_{10} = 1 - \frac{36598\,.\,5595944}{5491948\,.\,140594}$$

$$\begin{aligned}
\log\ \ 36595 &= 4{,}5634542\\
\log\ 5595944 &= 6{,}7478733\\
\hline
&\quad\ 11{,}3113275\\
\log\ 5491948 &= 6{,}7397261\\
\log\ \ 140594 &= 6{,}1479664\\
\hline
&\quad\ 11{,}8876928\\
\hline
&\quad\ 0{,}4236347 - 1
\end{aligned}$$

$$\tau_{25}\,\tau_{10} = 1 - 0{,}2652374 = 0{,}7347626\,.$$

$$\tau_{20}\,\tau_{15} = 1 - \frac{36598\,(108489 + 306640)}{1084829\,.\,343247}\,;$$

$$\tau_{20}\,\tau_{15} = 1 - \frac{36598\,.\,2391478}{1084829\,.\,343247}$$

$$\begin{aligned}
\log\ \ 36598 &= 4{,}5634542\\
\log\ 1391478 &= 6{,}1434763\\
\hline
&\quad\ 10{,}7069305\\
\log\ 1084820 &= 6{,}0353614\\
\log\ \ 343247 &= 5{,}5356064\\
\hline
&\quad\ 11{,}5709678\\
\hline
&\quad\ 0{,}1359627 - 1
\end{aligned}$$

$$\tau_{20}\,\tau_{15} = 1 - 0{,}1367611 = 0{,}8632389\,.$$

$$\tau_{25}\,\tau_5 = 1 - \frac{67802\,.\,(87871163 + 72792)}{87871163\,.\,140594}\,;$$

$$\tau_{20}\,\tau_5 = 1 - \frac{67802 \,.\, 87943955}{87871163 \,.\, 140594};$$

$$\begin{array}{rl} \log & 67802 = 4{,}8312414 \\ \log & 87943955 = 7{,}9442060 \\ \hline & 12{,}7754474 \\ & 13{,}0918128 \\ \hline & 0{,}6836346 - 1 \end{array} \Big\} +$$

$$\tau_{25}\,\tau_5 = 1 - 0{,}4826526 = 0{,}5173474 .$$

$$\tau_{20}\,\tau_{10} = 1 - \frac{67802\,(5491948 + 275445)}{343247 \,.\, 5491948};$$

$$\tau_{20}\,\tau_{10} = 1 - \frac{67802 \,.\, 5767393}{343247 \,.\, 5491948}$$

$$\begin{array}{rl} \log & 67802 = 4{,}8312514 \\ \log & 5767393 = 6{,}7609796 \\ \hline & 11{,}5922210 \\ \log & 343247 = 5{,}5356064 \\ \log & 5491948 = 6{,}7397264 \\ \hline & 12{,}2753328 \\ \hline & 0{,}3168882 - 1 \end{array} \Big\} -$$

$$\tau_{20}\,\tau_{10} = 1 - 0{,}2074380 = 0{,}892562 .$$

$$\tau_{15}\,\tau_{15} = 1 - \frac{67802\,(1084829 + 1017027)}{1084829^2};$$

$$\tau_{15}\,\tau_{15} = 1 - \frac{67802 \,.\, 2101856}{1084829^2};$$

$$\begin{array}{rl} \log & 67802 = 4{,}8313414 \\ \log & 2101856 = 6{,}3226030 \\ \hline & 11{,}1538443 \\ \log & 1084829 = 12{,}0707228 \\ \hline & 0{,}0831216 - 1 \end{array} \Big\} -$$

$$\tau_{15}\,\tau_{15} = 1 - 0{,}1210937 = 0{,}8789063\,.$$

$$\tau_{20}\,\tau_{5} = 1 - \frac{140594\,(87871163 + 202653)}{87871163\,.\,343247};$$

$$\tau_{20}\,\tau_{5} = 1 - \frac{140594\,.\,88063816}{87871163\,.\,343247}\,.$$

$$\begin{array}{rr} \log & 140594 = 5{,}1479664 \\ \log & 88073816 = 7{,}9448468 \\ \hline & 13{,}0928132 \\ & 13{,}4794528 \\ \hline & 0{,}6133604 - 1 \end{array}$$

$$\tau_{20}\,\tau_{5} = 1 - 0{,}4105446 = 0{,}59894554\,.$$

$$\tau_{15}\,\tau_{10} = 1 - \frac{140594\,(5491948 + 944235}{5491948\,.\,1084829};$$

$$\tau_{15}\,\tau_{10} = 1 - \frac{140594\,.\,6436183}{108482\,.\,54919489};$$

$$\begin{array}{rr} \log & 140594 = 5{,}1479664 \\ \log & 6436183 = 6{,}8036284 \\ \hline & 11{,}9515948 \\ \log & 1084829 = 6{,}0353614 \\ \log & 5491948 = 6{,}7397264 \\ \hline & 12{,}7750878 \\ \hline & 0{,}1765070 - 1 \end{array}$$

$$\tau_{15}\,\tau_{10} = 1 - 0{,}1501437 = 0{,}8498563$$

$$\tau_{15}\,\tau_{5} = 1 - \frac{343247\,(87871163 + 741582)}{87871163\,.\,1084829};$$

$$\tau_{15}\,\tau_{5} = 1 - \frac{343247\,.\,88612745}{87871163\,.\,1084829};$$

$$\log\ 343247 = 5{,}5356064$$
$$\log\ 88612745 = 7{,}9474962$$
$$13{,}4831026$$
$$\log\ 87871163 = 7{,}9438464$$
$$\log\ 1084829 = 6{,}0353614$$
$$13{,}9792078$$
$$0{,}5038948 - 1$$

$$\tau_{15}\,\tau_5 = 1 - 0{,}3190765 = 0{,}6809235\,.$$

$$\tau_{10}\,\tau_{10} = 1 - \frac{343247\,(5491948 + 5148701)}{5491948^2};$$

$$\log\ 343247 = 5{,}5356064$$
$$\log\ 10640649 = 7{,}0269678$$
$$12{,}5625742$$
$$2\ \log\ 5491948 = 13{,}4794528$$
$$0{,}0831214 - 1$$

$$\tau_{10}\,\tau_{10} = 1 - 0{,}1210937 = 0{,}8789063\,.$$

$$\tau_{10}\,\tau_5 = 1 - \frac{1084829\,(87871163 + 4407119)}{87871163\,.\,5491948};$$

$$\tau_{10}\,\tau_5 = 1 - \frac{1084829\,.\,92278282}{87871163\,.\,5491948};$$

$$\log\ 1084829 = 6{,}0353614$$
$$\log\ 92278282 = 7{,}9650995$$
$$14{,}0004609$$
$$\log\ 87871163 = 7{,}9438464$$
$$\log\ 549148 = 6{,}7397264$$
$$14{,}6835728$$
$$0{,}3168881 - 1$$

$$\tau_{10}\,\tau_5 = 1 - 0{,}2074380 = 0{,}792562$$

$$\tau_5\,\tau_5 = 1 - \frac{5491948\,(87871163 + 82379215)}{87871163^2};$$

$$\tau_5\,\tau_5 = 1 - \frac{5491948 \cdot 170250378}{87871163^2};$$

$$\begin{aligned} \log\ 5491948 &= 6{,}7397264 \\ \log\ 170250378 &= 8{,}2310881 \\ \hline & \quad 14{,}9708145 \\ 2\ \log\ 87871163 &= 15{,}8876928 \\ \hline & \quad 0{,}0831217 - 1 \end{aligned}$$

$$\tau_5\,\tau_5 = 1 - 0{,}1210938 = 0{,}8789062$$

Ordnen wir die gefundenen Werte nach ihrer Grösse

$$\begin{aligned}
\tau_{35}\,\tau_5 &= 0{,}4137174 \\
\tau_{30}\,\tau_5 &= 0{,}4600330 \\
\tau_{25}\,\tau_5 &= 0{,}5173474 \\
\tau_{20}\,\tau_5 &= 0{,}5894554 \\
\tau_{30}\,\tau_{10} &= 0{,}6809233 \\
\tau_{15}\,\tau_5 &= 0{,}6809235 \\
\tau_{25}\,\tau_{10} &= 0{,}7347626 \\
\tau_{20}\,\tau_{10} &= 0{,}7925620 \\
\tau_{10}\,\tau_5 &= 0{,}7925620 \\
\tau_{25}\,\tau_{15} &= 0{,}8306552 \\
\tau_{15}\,\tau_{10} &= 0{,}8498563 \\
\tau_{20}\,\tau_{15} &= 0{,}8632389 \\
\tau_5\ \tau_5 &= 0{,}8789062 \\
\tau_{10}\,\tau_{10} &= 0{,}8789063 \\
\tau_{15}\,\tau_{15} &= 0{,}8789063 \\
\tau_{20}\,\tau_{20} &= 0{,}8789064
\end{aligned}$$

so sehen wir, dass dieselben zunehmen, je mehr sich das Verhältnis der Länge der gekoppelten Stäbe dem Wert 1 nähert, mit welchem ein Maximum der Koppelung erreicht wird.

Die vorliegenden Längenverhältnisse sind durch die echten Brüche $^1/_7$; $^1/_6$; $^1/_5$; $^1/_4$; $^1/_3$; $^2/_5$; $^1/_2$; $^3/_5$; $^3/_4$ und $^1/_1$ bestimmt.

Entsprechend dem erhaltenen Maximum der Koppelung für zwei gleichlange Stäbe, ist auch ein Minimum vorhanden, welches sich aus der Ausgangsgleichung

$$\tau_m \tau_n = 1 - \frac{n^2 (k_m^2 + k_n^2 - n^2)}{k_m^2 k_n^2}$$

ableiten lässt.

Bleibt die Bedingung $l = l_m + l_n$ stets bestehen und wird allmählig

$$l_m = l,$$

$$\text{also } l_n = 0$$

$$\text{oder } k_m = n \text{ und } k_n = 0,$$

so würden wir, wenn wir diese letzten speziellen Werte einsetzten, das unbestimmte Resultat $1 - \frac{0}{0}$ erhalten; führen wir jedoch nur $k_m = n$ ein und behalten k_n als unendlich kleine Grösse bei, so folgt aus

$$\tau_m \tau_n = 1 - \frac{n^2 (k_m^2 + k_n^2 - n^2)}{k_m^2 k_n^2}$$

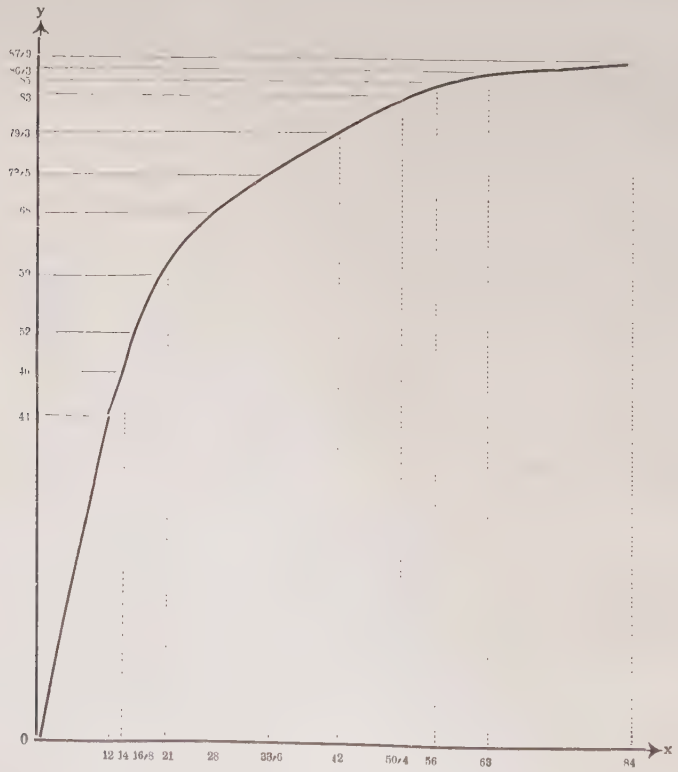
$$\tau_m \tau_{n=0} = 1 - 1 = 0$$

d. h. es ist gar kein Koppelung vorhanden, denn in der Tat ist es nur der Stab mit der Schwingungszahl n, welcher in Betracht kommt.

Um das Wachstum der Koppelung auch graphisch darzustellen, nehmen wir als Abscissen x die relativen

Längen und als Ordinaten y die gefundenen Koppelungswerte; bezieht man jene auf eine Einheitslänge l = 84 Teile und nimmt diese als Hundertstelteile, so sind die entsprechenden Werte, zusammengestellt, folgende:

x'	1/7	1/6	1/5	1/4	1/3	2/5	1/2	3/5	2/3	3/4	1/1
y'	0,4137	0,4600	0,5895	0,5895	0,6810	0,7348	0,7926	0,8307	0,8499	0,8632	0,8789
x	12	14	16,8	21	28	33,6	42	50,4	56	63	84
y	41	46	52	59	68	73,5	73,5	83	85	86,3	87,9



Die Kurve steigt in der ersten Hälfte rasch und steil an, während sie von den mittleren Werten bis zu dem Grenzwert ziemlich gleichmässig, zwar auch noch stetig wachsend, verläuft.

Aus den angeführten und zusammengestellten Werten lassen sich noch fehlende Zwischenwerte mit sehr grosser Genauigkeit ablesen oder als Mittelwerte berechnen. Es ist daher auch möglich, folgende Aufgaben zu lösen:

1) Gegeben ist ein beliebig langer Stab mit bekannter Schwingungszahl; um wieviel muss derselbe verlängert oder verkürzt werden, damit er sodann eine geforderte Anzahl Schwingungen ausführt «
2) Verlängert man einen gegebenen Stab mit bekannter Schwingungszahl um ein Vielfaches seiner Länge, wie ändert sich seine Schwingungszahl?

Sind die Stäbe aus gleichem, homogenen Material, so lässt sich eine andere, einfache Art der Auflösung finden, indem man berücksichtigt, dass die Schwingungszahlen sich zu einander verhalten umgekehrt wie die Quadratzahlen der Längen der Stäbe.

Gehen wir jetzt aber zu der Frage über, wie gestalten sich die Verhältnisse, wenn zwei Stäbe von verschiedenem Material gekoppelt werden?

Die Formel

$$\tau_m \tau_n = 1 - \frac{n^2 (k_m^2 + k_n^2 - n^2)}{k_m^2 k_n^2}$$

gilt allgemein für Stäbe von gleicher Dichte und gleichem Elastizitätskoeffizienten und deshalb sind die Werte der Koppelungskurve für Stäbe jeder Art an-

wendbar, wenn man die Koeffizienten bestimmt, welche dieselben auf gleiches Material resp. gleiche Dicke zurückführen, falls sie sich in einer dieser Eigenschaften unterscheiden.

Die Schwingungszahlen selbst wurden nach der Gleichung

$$N = \frac{(2n + 1)^2 \cdot d \cdot \pi}{8 L^2} \sqrt{\frac{E}{12 D}}$$

berechnet und für zwei ganz verschiedene Stäbe, nur die Dicken mögen dieselben bleiben, erhalten wir die Werte:

$$N_1 = \frac{(2n + 1)^2 \cdot d \cdot \pi}{8 L_1^2} \sqrt{\frac{E_1}{12 D_1}}$$

und

$$N_2 = \frac{(2n + 1)^2 \cdot d \cdot \pi}{8 L_2^2} \sqrt{\frac{E_2}{12 D_2}}$$

damit $N_1 = N_2$ wird, aber der Koppelungs-Koeffizient 0,879 gilt, muss die Proportion gelten:

$$\frac{L_1^2}{L_2^2} = \sqrt{\frac{E_1 \cdot D_2}{E_2 \cdot D_1}}$$

oder

$$\frac{L_1^4}{L_2^4} = \frac{E_1 \cdot D_2}{E_2 \cdot D_1}$$

Es würden also z. B. zwei Stäbe von gleicher Dichte, aber ungleichem Elastizitätsmodul nur dann gleiche Schwingungszahlen hervorbringen, wenn die vierten Potenzen der Längen der Stäbe sich direkt wie die Elastizitätsmoduln verhielten.

Es haben Zink und Zinn fast gleiche Dichte (7,1 und 7,3), aber die Elastizitätskoeffizienten haben

die Werte 9000 und 4500 und es müsste die Länge des Zinkstabes

$$l_1 = \sqrt[4]{2}\, l_2$$

von der des Zinkstabes sein, wenn beide Stäbe gleiche Schwingungszahl ergeben sollen.

Der genauere Wert ist

$$l_1 = \sqrt[4]{\frac{2 \cdot 7{,}3}{7{,}1}} = 1{,}197\, l_2$$

Den gleichen Ton, den ein Zinnstab von der Länge $2\, l_2$ gibt, wird man von einem Zinn-Zinkstab erhalten, wenn man einen Zinnstab von der Länge l_2 mit einem Zinkstab von der Länge $1{,}197\, l_2$ koppelt und macht man den ersteren allmählich von kürzerer Länge, so muss der Zinkstab verhältnismässig um so länger werden, und erreicht jener den Wert Null, so hat man schliesslich nur einen Zinkstab von der Länge $2{,}394\, l_2$; auf diese Weise kann man fortfahren und zu diesen beiden Stäben, welche jetzt als ein System aufgefasst werden, einen dritten Stab von ebenfalls verschiedenen Elastizitätskoeffizienten fügen; u. s. w.[1]

Ähnliche Betrachtungen lassen sich für Stäbe von gleichem Elastizitätsmodul, aber verschiedener Dichte anstellen; hierbei wird das Verhältnis der Dichten den reciproken Werten der vierten Potenzen der Länge entsprechen.

---

[1]) Die praktischen Versuche mit Zinn- und Zinkstäben der angegebenen Längen sind im physikalischen Institut zu Rostock angestellt worden.

Sind beide Grössen, Dichte und Elastizitäts-koeffizient der Stäbe untereinander verschieden, so erkennt man die Längenverhältnisse am besten aus der Form:

$$\frac{L_1^4}{L_2^4} = \frac{\left(\frac{E_1}{D_1}\right)}{\left(\frac{E_2}{D_2}\right)}$$

Bisher haben wir stets nur Stäbe gleicher Dicke betrachtet und Längskoppelungen eintreten lassen.

Es kann nun jedoch auch ein Stab als aus zwei übereinander gelegten Stäben von gleicher Länge und den Dicken d_1 und d_2 aufgefasst werden.

Die Schwingungszahl n desselben verhält sich dann gemäss unserer Formel zu den Einzelschwingungszahlen wie die Dicken der betreffenden Stäbe; also:

$$n : k_1 : k_2 = d : d_1 : d_2 ,$$

oder da $d_1 + d_2 = d$ ist,

$$\frac{k_1 + k_2}{k_2} = \frac{d_1 + d_2}{d_2} = \frac{d}{d_2};$$

Es folgt demnach

$$n = k_1 + k_2$$

d. h. die Schwingungszahlen der Einzelstäbe addiert, ergeben die resultierende Schwingungszahl.

Damit nun zwei Stäbe von gleicher Länge aber verschiedenem Material (Dichte und Elastizitätskoeffizienten) dieselben Schwingungen ausführen, müssen sie von verschiedener Dicke gemacht sein.

Aus

$$N = \frac{(2n+1)^2 d_1 \pi}{8 L^2} \sqrt{\frac{E_1}{12 D_1}} = \frac{(2n+1)^2 d_2 \pi}{8 L^2} \sqrt{\frac{E_2}{12 D_2}}$$

folgt:

$$\frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{\frac{E_2}{E_1}}{\frac{D_2}{D_1}} = \frac{D_1}{D_2} \cdot \frac{E_2}{E_1}$$

d. h. die Quadratzahlen der Dicken müssen sich bei gleicher Länge direkt wie die Dichten und umgekehrt wie die Elastizitätskoeffizienten verhalten.

Für Zink- und Zinnstäbe würden wir die entsprechenden Werte einzusetzen haben und erhalten:

$$\frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{7,1 \cdot 4500}{7,3 \cdot 9000};$$

$$d_1 = 0,697353\, d_2 .$$

Fassen wir den Zinnstab als Einheitsstab (Länge l und Dicke d) auf, so muss ein Zinkstab bei gleicher Dicke 1,197 mal so lang oder bei gleicher Länge nur 0,697 mal so dick sein, damit beide gleiche Schwingungszahlen ergeben.

Wenn wir zwei Stäbe gleicher Dicke der Länge nach mit einander verbinden, so können wir voraussetzen, dass die Koppelung der Berührungsflächen eine vollständige ist und es dürfen stets die gefundenen Gleichungen der Längskoppelung, resp. die Werte der Koppelungskurve allgemein angewandt werden, zumal dieselben durch praktische Versuche auch Bestätigung erhalten.

Werden jedoch zwei Stäbe gleicher Länge, aber verschiedener Dicke, die alleinschwingend gleiche Schwingungszahlen wohl haben können, durch Längskoppelung mit einander vereint, so ergiebt der praktische Versuch ein anderes Resultat für die Schwingungs-

zahl, als man unter Voraussetzung der Werte der Koppelungskurve erwarten müsste. Die wirklichen Schwingungszahlen sind grösser als die berechneten und es kann dies nur davon herrühren, dass die Koppelung der Berührungsflächen eine geringere geworden ist und demnach die Annahme berechtigt erscheint, dass dieselbe vom Verhältnis der Flächen selbst, resp. da die Breiten ohne Einfluss sind, von dem Dickenverhältnis der Stäbe direkt abhängig ist.

Ein 20 cm langer und 1 cm dicker Zinnstab und ein 20 cm langer und nur 0,6974 cm dicker Zinkstab würden $k_1 = k_2 = 632$ Schwingungen, aber die doppeltsolangen Zinn- und Zinkstäbe mit denselben angegebenen Dicken nur $n = 158$ Schwingungen machen.

Koppeln wir jetzt diese 20 cm langen Zinn- und Zinkstäbe aneinander und geben diesem Koppelungsprodukt, welches für gleiche Längen den Wert $\tau_1 \tau_2 = 0{,}8789063$ hat, den Proportionalitätsfaktor $\frac{d_2}{d_1}$, so finden wir für den ganzen Stab die Schwingungszahl aus:

$$\frac{d_2}{d_1} \tau_1 \tau_2 = 1 - \frac{n^2 (2 k^2 - n^2)}{k^4};$$

$$n^4 - 2 k^2 n^2 = k^4 \left(\frac{d_2}{d_1} \tau_1 \tau_2 - 1 \right);$$

$$n = k \sqrt{1 \pm \sqrt{\frac{d_2}{d_1} \tau_1 \tau_2}};$$

$$n = 632 \sqrt{1 \pm \sqrt{0{,}6974 \cdot 0{,}8789063}};$$

$$\log 0{,}6974 = 0{,}8434819 - 1$$
$$\log 0{,}8789063 = 0{,}9439426 - 1$$
$$1{,}7874245 - 2$$
$$0{,}8937123 - 1$$

$$n = 632 \sqrt{1 \pm 0{,}7829105}$$

Da für uns nur die kleinere Schwingungszahl in Betracht kommen kann und muss, so wird

$$n = 632 \sqrt{0{,}2170895} = 294{,}5 .$$

Dieser Wert kommt demjenigen, wie man ihn aus dem praktischen Versuch entnimmt, sehr nahe, denn derselbe lässt die tiefere Oktave, wenn auch nicht ganz genau, heraushören.

Aus dem soeben Ausgeführten kann man auch eine Beziehung folgern, die für ungleich dicke Stäbe aus demselben Material anwendbar sein wird.

Zwei Stäbe dieser Art würden, nach unserer Ausgangsformel für die Schwingungszahlen, gleiche Werte für diese ergeben, wenn die Proportion

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{l_1^2}{l_2^2} \text{ besteht ;}$$

d. h. je dicker der Stab sein soll, desto länger muss derselbe bei gleichem N werden und zwar, wenn $d_2 = x \cdot d_1$ ist, nach der Gleichung: $l_2 = l_1 \sqrt{x}$.

Es möge nebenbei bemerkt werden, dass die zueinander gehörenden Längen und Dicken graphisch sich als Ordinaten und Abscissen einer Parabel darstellen lassen.

Da die Dicken verhältnismässig rascher zunehmen als die Längen, so kann der Fall eintreten, dass die

Dicke gleich der Länge wird und unter welchen Bedingungen geschieht dies?

Es sei

$$N_1 = \frac{d_1}{l_1^2}\ p \text{ und } N_2 = \frac{d_2}{l_2^2}\ p$$

und setzt man

$$d_1 = \frac{l_1}{m},$$

so soll für $N_1 = N_2$ alsdann $l_2 = d_2$ sein, und es muss demnach $l_2 = m\, l_1$ werden.

Als Beispiel möge ein 10 cm langer und 2 cm dicker Stab gewählt werden.

Hiernach ist

$$d_1 = \frac{1}{5}\ l_1\ ;$$

also wird

$$l_2 = d_2 = 5\ l_1$$

Setzt man die Worte selbst ein, so erhält man:

$$\frac{d_1}{l_1^2} = \frac{d_2}{l_2^2}$$

oder

$$\frac{\frac{1}{5}\ l_1}{l_1^2} = \frac{5\ l_1}{25\ l_1^3}\ .\ \tilde{Q}\ .\ c\ .\ d.$$

Über den Unterschied der verschieden langen und dicken Stäbe gleicher Schwingungszahl zu einander kann man bemerken, dass derselbe einmal in der Intensität des erregten Tones besteht und dass ferner bei den kürzeren Stäben meistenteils nicht der Grundton, sondern einer oder mehrere Obertöne besonders stark erkennbar sind.

Koppeln wir jetzt, um unsere früher berechneten Schwingungszahlen benutzen zu können, zwei Holz-

stäbe von 20 cm Länge und den Dicken 2 cm und 1 cm aneinander, so müsste nach der Annahme der unvollständigen Koppelung sich die Schwingungszahl folgendermassen ergeben:

$$\delta \cdot \tau_1 \tau_2 = 1 - \frac{n^2 (k_1^2 + k_2^2 - n^2)}{k_1^2 \cdot k_2^2};$$

$$n^2 = \frac{k_1^2 + k_2^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{k_2^2 - k_2^2}{2}\right)^2 + \delta \tau_1 \tau_2 k_1^2 k_2^2};$$

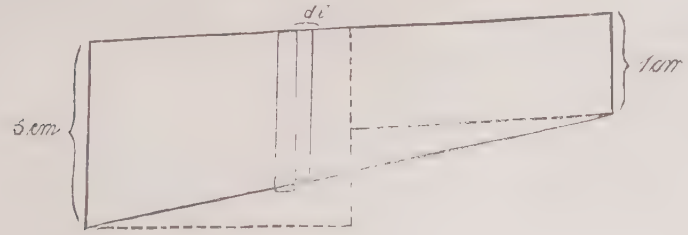
$$k_1 = 1172 : \delta = \frac{d_2}{d_1} = 0{,}5$$

$$k_2 = 586 ; \tau_1 \tau_2 = 0{,}8789063$$

Setzt man diese Werte ein, so findet man als einzig in Betracht kommenden Wert

$$n = 413{,}5 .$$

Dieses Ergebnis konnte aber durch den praktischen Versuch nicht eingehend geprüft und bestätigt werden, denn bei dem verhältnismässig grossen Unterschied der angenommenen Werte für die Dicken klang je nach der Lage der Erregungsstellen an dem einen oder anderen Ende der diesem Teilstab eigentümliche Ton, zwar ein wenig tiefer, allein hervor und auch durch Anschlagen in der Mitte erhielt man keinen einzelnen, bestimmt hervortretenden und analysierbaren Ton, sondern es waren mindestens immer zwei verschiedene Töne hörbar.



Besser fiel der Versuch mit einem im Durchschnitt trapezförmigen Stabe aus. Die verschiedenen Dicken sind die parallelen und die Ober- und Unterfläche desselben die nicht parallelen, ungleichen Seiten des Trapezes. Entstanden kann man sich den Stab auch durch fortwährendes Ankoppeln von in der Dicke kürzer werdenden Stäben der Länge dl denken, oder wenn man nur zwei Systeme ins Auge fasst, aus 2 Stäben von den Längen je 20 cm und den Dicken 3 cm und 1 cm.

Machen wir jetzt wieder die Annahme, dass die Koppelung keine vollständige sei und fügen wir deshalb zu dem Produkt der Koppelungskoeffizienten das Verhältnis der Dicken hinzu, so erhalten wir als resultierende Schwingungszahl aus:

$$\frac{d_2}{d_1} \cdot \tau_1 \tau_2 = 1 - \frac{n^2 (k_1^2 + k_2^2 - n^2)}{k_1^2 k_2^2};$$

$$n^2 = \frac{k_1^2 + k_2^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{k_1^2 - k_2^2}{2}\right)^2 + \frac{d_2}{d_1} \tau_1 \tau_2 k_1^2 k_2^2}$$

Es ist nun:

$$k_2 = 586$$

$$k_1 = 1758 = 3\ k_2;$$

$$d_1 = 3 \text{ cm und } d_2 = 1 \text{ cm};$$

$$\tau_1 \tau_2 = 0{,}8789063$$

also:

$$n_2 = \frac{9 k_2^2 + k_2^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{9 k_2^2 - k_2^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \tau_1 \tau_2 9 k_2^2}$$

$$n^2 = k_2^2 \left(5 \pm \sqrt{16 + 3 \cdot 0{,}8789063}\right);$$

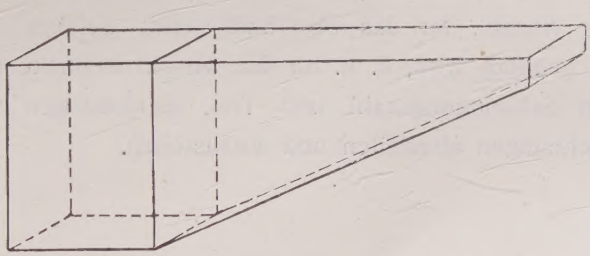
Da nur der tiefere Ton für uns Bedeutung hat, wird:

$$n = k_2 \sqrt{5 - 4{,}317} = k_2 \cdot \sqrt{0{,}683}$$

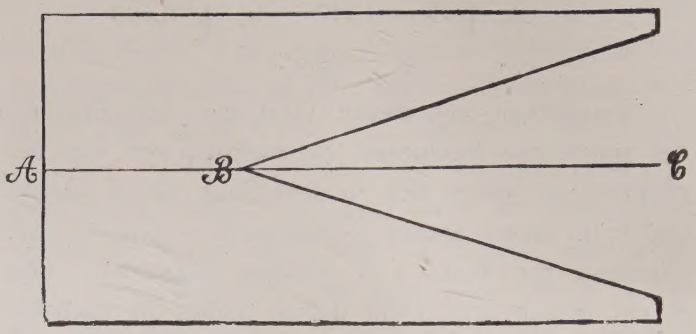
$$n = 484{,}3 .$$

Vergleichen wir diesen Wert mit dem Ergebnis des praktischen Versuches, bei welchem der Ton des keilförmigen Stabes sich zu dem eines 20 cm langen und 1 cm dicken Stabes — System II — ungefähr wie Grundton zur Terz, 4 : 5, verhielt oder dem eines 30 cm langen und 2 cm dicken Stabes am nächsten kam, so hat man eine gewisse Art Bestätigung für die mögliche Richtigkeit der Annahme einer unvollständigen Koppelung, die von den Dicken abhängig ist.

Hieran könnten sich nun Betrachtungen anschliesen über zwei gekoppelte Systeme, von denen das eine parallelopipedische und das andere trapezförmige Gestalt hat und die mit ihren gleichen Endflächen gekoppelt sind;



fasst man diese sodann als ein System wieder auf und koppelt es z. B. mit einem zweiten gleicher Art nach der Symmatrieebene A B C, so nimmt dieses Endsystem schon die Form des Durchschnitts einer Glocke an.



Ob die eingeschlossene Luftmenge ebenfalls als besonderes System aufgefasst werden muss und als solches womöglich interferierend oder dämpfend einwirkt, ist hier nicht die Möglichkeit gegeben zu entscheiden, da die zur Verfügung stehenden Hilfsmittel und Resultate durch Experimente schon für die eben angeführten Fälle nicht mehr ausreichen; es ist aber nicht auszuschliessen, dass es gelingen müsste, aus einer Reihe von vielen, einzelnen Systemen aber endlicher Anzahl, für das eine Endsystem, welches von allen gebildet wird, d. h. für die wirkliche Glocke und deren Schwingungszahl und Ton, Beziehungen und Berechnungen abzuleiten und aufzustellen.

Bei Abschluss meiner Arbeit möchte ich meinem hochverehrten Lehrer Herrn Prof. Dr. Wachsmuth auch an dieser Stelle meinen aufrichtigsten Dank für die Anregung zu dieser Abhandlung, sowie für die liebenswürdige Unterstützung während der Ausführung aussprechen.